Trigonometri

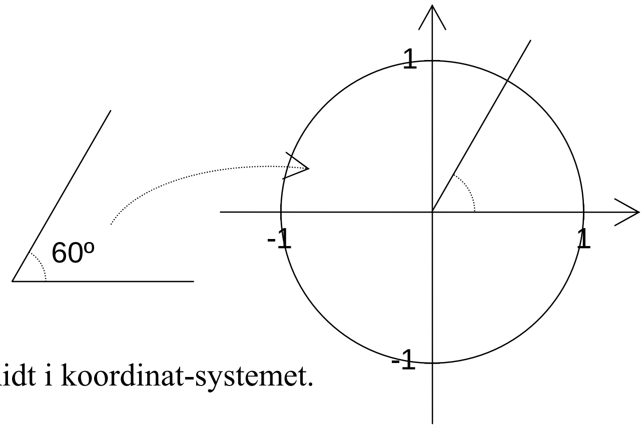
Sinus og cosinus 2
Tangens 6
Opgaver 9

Sinus og cosinus

Til alle vinkler hører der to tal,
som kaldes **cosinus** og **sinus**.

Man finder sinus og cosinus
til en vinkel ved at tegne vinklen
midt i et koordinat-system
som vist her.

Man skal også tegne en cirkel
med radius en (r = 1) og med centrum midt i koordinat-systemet.
Cirklen kaldes en **enheds-cirkel**.



Cosinus til en vinkel er første-koordinaten til skæringspunktet mellem vinklens venstre ben og enheds-cirklen.	**Sinus** til en vinkel er anden-koordinaten til skæringspunktet mellem vinklens venstre ben og enheds-cirklen.

Her vil vi kun arbejde med vinkler mellem 0º og 90º.
Cosinus og sinus vil være mellem 0 og 1. Altså i intervallet $[0;1]$.

I stedet for cosinus til 60º og sinus til 60º skriver man cos(60º) og sin(60º).

På regnemaskinen finder man cos(60º) ved
at trykke $\boxed{\text{cos}}$ 60 $\boxed{=}$. Man får præcis 0,5.

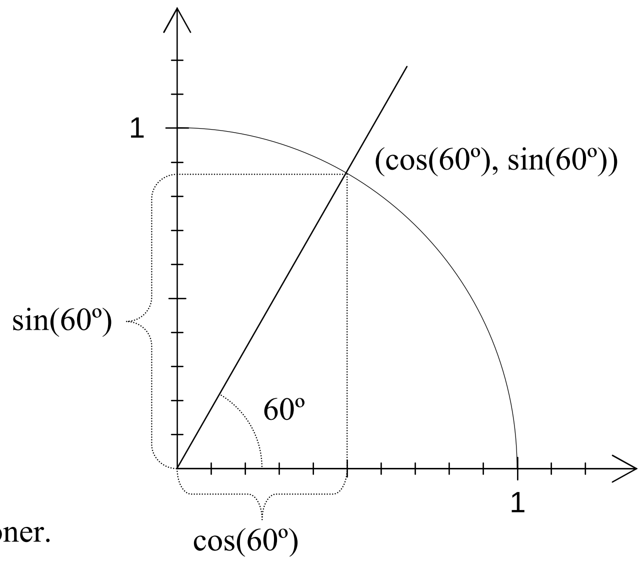
Man finder sin(60º) ved at trykke $\boxed{\text{sin}}$ 60 $\boxed{=}$.
Man får et decimaltal, som starter med 0,886.

På nogle regnemaskiner skal man taste
i modsat rækkefølge. Fx 60 $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{=}$.

Hvis man kender cosinus eller sinus
til en vinkel, kan man finde vinklen
ved at trykke $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{cos}}$ eller $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{sin}}$.

På mange regnemaskiner skal man taste $\boxed{\text{2nd}}$
i stedet for $\boxed{\text{Inv}}$.

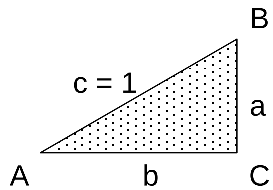
Sinus og cosinus kaldes **trigonometriske** funktioner.



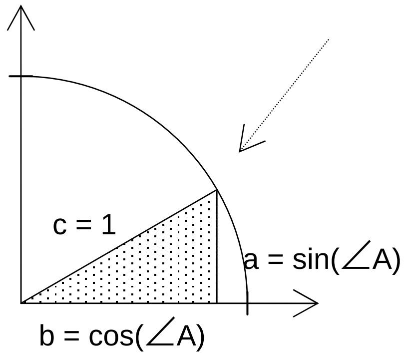
Eksempler på opgaver

Find cosinus til 35º	Hvilken vinkel har sinus-værdien 0,94?
På regnemaskinen trykkes $\boxed{\text{cos}}$ 35 $\boxed{=}$. Man får cos(35º) = 0,819	På regnemaskinen trykkes $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{sin}}$ 0,94 $\boxed{=}$. Man får 70º.

Vi skal især arbejde med vinkler i **retvinklede trekanter**.



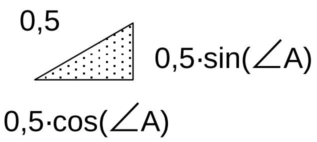
Ved siden af er tegnet en retvinklet trekant ABC,
hvor c (hypotenusen) har længden en.
Nedenfor er trekanten placeret i en enhedscirkel.
Hypotenusen er radius i cirklen.
Trekantens to andre sider a og b (kateterne)
har længderne sin(∠A) og cos(∠A).

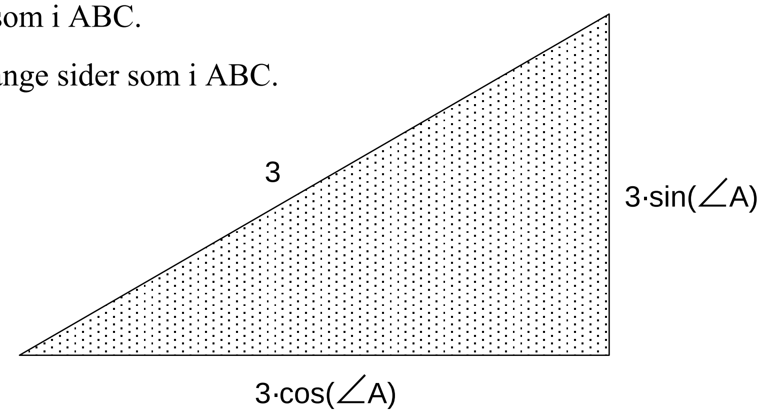


Herunder er tegnet to andre trekanter
med de samme vinkler som trekant ABC.
Trekanterne har præcis samme form som ABC,
men den ene er formindsket og den anden forstørret.
Man siger, at de tre trekanter er **ligedannede**.

Siderne i den lille trekant er halvt så lange som i ABC.

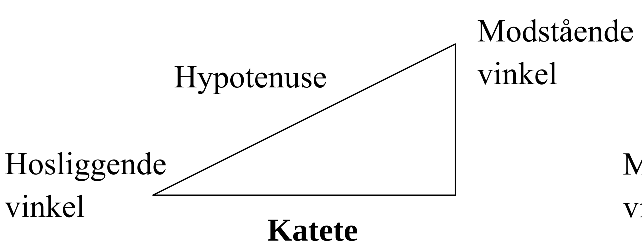
Siderne i den store trekant er tre gange så lange sider som i ABC.

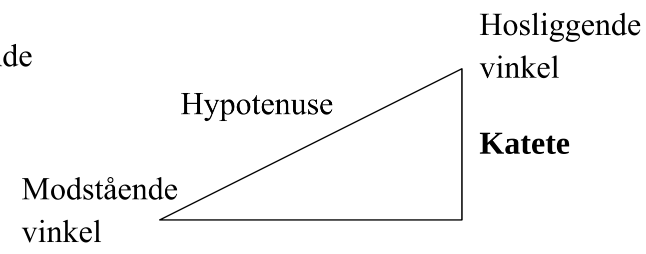




Man kan finde kateterne i retvinklede trekanter med disse formler:

Længden af en katete = længden af hypotenusen · cosinus til den hosliggende vinkel Længden af en katete = længden af hypotenusen · sinus til den modstående vinkel



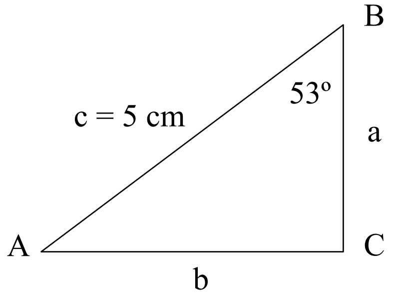


Formlerne gælder for begge kateter, men det er **svært** at huske, hvilken vinkel der er hosliggende, og hvilken vinkel der er modstående. Tænk dig **godt** om!

Eksempel på opgave

I en retvinklet trekant ABC er hypotenusen 5 cm og $\angle B$ er 53°.

Hvor stor er $\angle A$?
Hvor lange er kateterne?



Vinkelsummen i en trekant er 180°, og den rette vinkel C er 90°.
Derfor får man: $\angle A = 180^\circ - 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$

Længden af kateterne kan findes med en af formlerne på forrige side.
c er hypotenusen. $\angle A$ er modstående til kateten a. $\angle B$ er modstående til kateten b.

Man får: $a = c \cdot$ sinus til den modstående vinkel $= c \cdot \sin(\angle A) = 5 \cdot \sin(37^\circ) = 3{,}009 \approx 3$ cm.

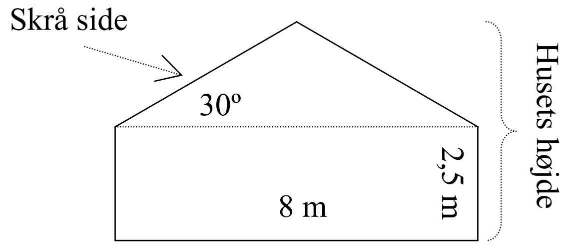
$b = c \cdot$ sinus til den modstående vinkel $= c \cdot \sin(\angle B) = 5 \cdot \sin(53^\circ) = 3{,}993 \approx 4$ cm.

Man kan også bruge formlen med cosinus til den hosliggende vinkel. Prøv selv!

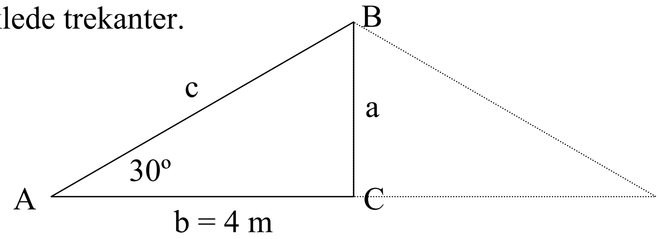
Eksempel på opgave

Tegningen viser en gavl på et hus.
Husets bredde er 8 m, muren er 2,5 m høj,
og tagets hældning er 30°.

Hvor lang er gavlens skrå side?
Hvor højt er huset?



Den øverste del af gavlen kan opdeles i to retvinklede trekanter.
Den skrå side er hypotenusen c.
$\angle A$ er hosliggende til kateten b.



Man får:

$b = c \cdot$ cosinus til den hosliggende vinkel

$b = c \cdot \cos(\angle A)$

$4 = c \cdot \cos(30^\circ)$

Ved ligningsløsning fås: $c = \dfrac{4}{\cos(30^\circ)} = 4{,}62$ m

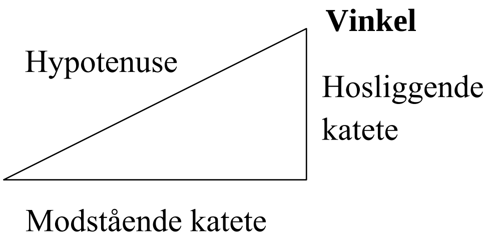
For at finde huset højde skal man først finde kateten a, som er tagets højde. Man får:

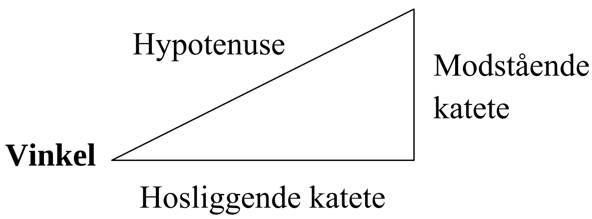
$a = c \cdot$ sinus til den modstående vinkel $= c \cdot \sin(\angle A) = 4{,}62 \cdot \sin(30^\circ) = 2{,}31$ m

Husets højde bliver murens højde + tagets højde: 2,5 m + 2,31 m = 4,81 m.

Man kan finde de ikke-rette vinkler i retvinklede trekanter med disse formler:

$$\text{Cosinus til en vinkel} = \frac{\text{Den hosliggende katete}}{\text{Hypotenusen}} \qquad \text{Sinus til en vinkel} = \frac{\text{Den modstående katete}}{\text{Hypotenusen}}$$



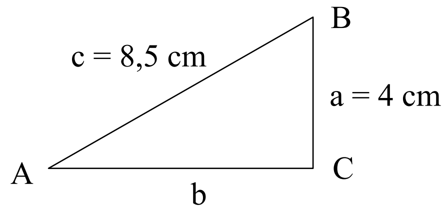


Formlerne gælder for begge de ikke-rette vinkler, men det er **svært** at huske, hvilken katete der er hosliggende, og hvilken katete der er modstående. Tænk dig **godt** om!

Eksempel på opgave

I en retvinklet trekant ABC er hypotenusen 8,5 cm,
og kateten a er 4 cm.

Hvor stor er ∠A?
Hvor lang er kateten b?



Kateten a er modstående til ∠A.

Man får først:

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{Den modstående katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{a}{c} = \frac{4}{8{,}5} = 0{,}471$$

Derefter tastes: $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{sin}}$ 0,471 $\boxed{=}$, og man får ∠A = 28º

Men man kan også få resultatet i en beregning ved at taste: $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{(}$ 4 $\boxed{\div}$ 8,5 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$.

Man kan finde kateten b på flere måder. Man kan fx bruge, at ∠A er hosliggende til b.

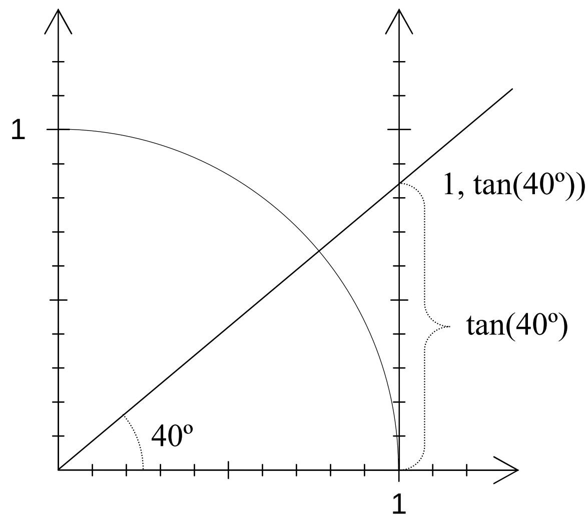
Man får: b = c · cosinus til den hosliggende vinkel = c · cos(∠A) = 8,5 · cos(∠28º) = 7,5 cm

Man kan også bruge Pythagoras' formel for sidelængderne i en retvinklet trekant: $a^2 + b^2 = c^2$.
Prøv selv!

Tangens

Du skal lære endnu en trigonometrisk funktion at kende. Det er **tangens**.

Man kan finde tangens til en vinkel ved at tegne en lodret linje gennem punktet (1,0).
Tangens er anden-koordinaten til det sted,
hvor vinklens venstre ben skærer denne linje.
Tegningen viser tangens til 40º.
Man skriver blot tan(40º).



På regnemaskinen finder man tan(40º)
ved at trykke $\boxed{\text{tan}}$ 40 $\boxed{=}$.
Man får et decimaltal, der starten med 0,839.

Man kan se, at tan(0º) = 0.
Når vinklen vokser bliver tangens større,
og der er ingen øvre grænse.

Man kan ikke finde tan(90º), da vinklens
venstre ben går lodret op og aldrig skærer linjen.

Når vinklen bliver større end 90º, bliver tangens negativ.
Men her vil vi kun kikke på tangens til vinkler mellem 0º og 90º.

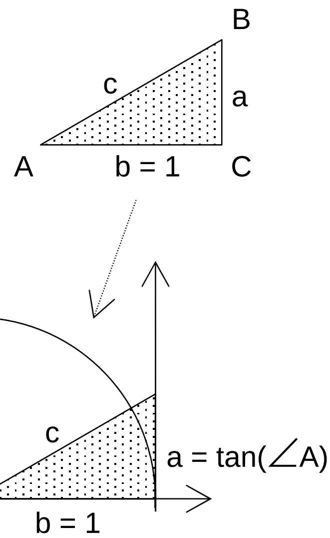
Eksempler på opgaver

Find tangens til 60°	Hvilken vinkel har tangens-værdien 1?

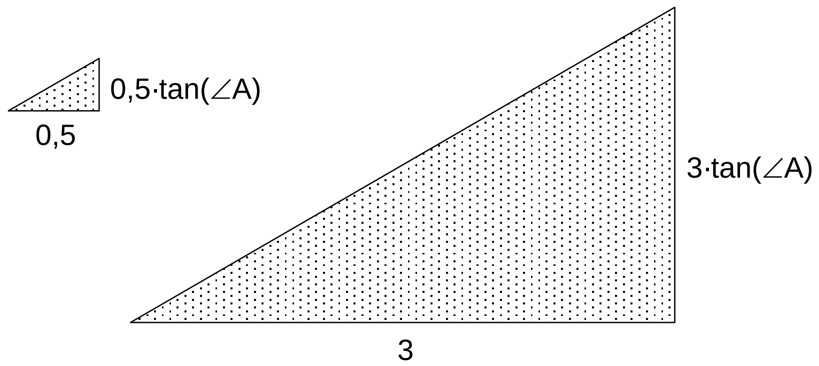
På regnemaskinen tastes $\boxed{\text{tan}}$ 60 $\boxed{=}$.
Man får tan(60º) = 1,732

På regnemaskinen tastes $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{tan}}$ 1 $\boxed{=}$.
Man får 45º.

Til højre er tegnet en retvinklet trekant ABC, hvor kateten b har længden en.
Nederst til højre er trekanten placeret i en enhedscirkel.
Siden a må have længden tan(∠A).

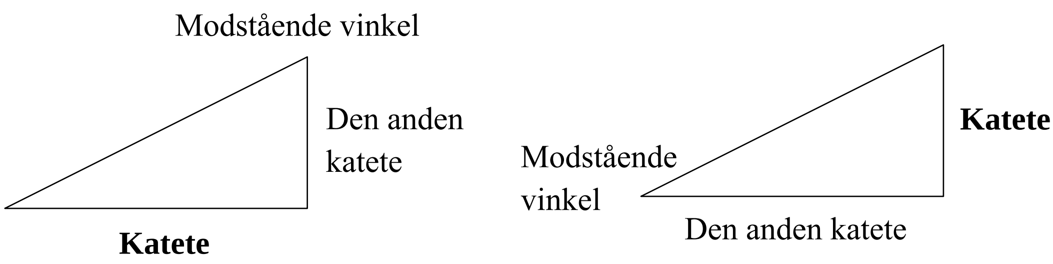


Nedenfor er tegnet to trekanter, som er ligedannede med trekant ABC.
I den ene er siderne halvt så lange. I den anden er tre gange så lange.



Man kan finde længden af en katete i en retvinklet trekant med denne formel:

Længden af en katete = længden af den anden katete · tangens til den modstående vinkel

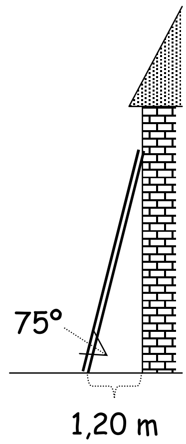


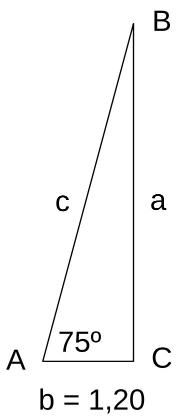
Formlerne gælder for begge kateter, men tænk dig **godt** om, når du bruger dem!

Eksempel på opgave

Tegningen viser en stige, der står op ad en mur.
Stigen står 1,20 m fra muren, og vinklen er 75°.

Hvor højt når stigen op på muren?
Hvor lang er stigen?





Stigen, jorden og muren danner en retvinklet trekant.
$\angle A$ er modstående til kateten a.
Man kan beregne, hvor langt stigen når op, således:

$$a = b \cdot \tan(\angle A)$$
$$a = 1{,}20 \cdot \tan(75°) = 4{,}48 \text{ m}$$

Stigens længde kan findes således:

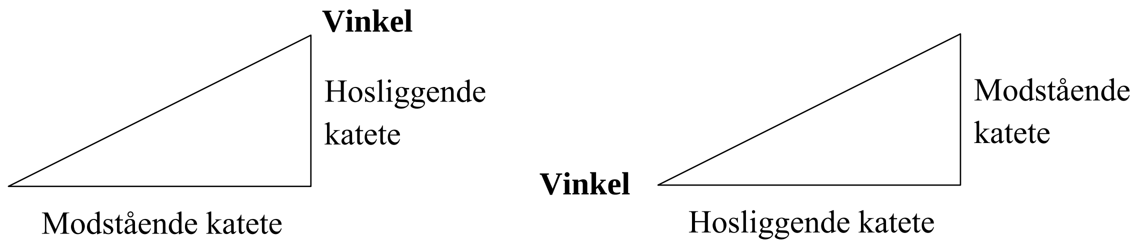
$$a = c \cdot \sin(\angle A)$$
$$4{,}48 = c \cdot \sin(75°)$$

Ved ligningsløsning fås: $c = \dfrac{4{,}48}{\sin(75°)} = 4{,}64 \text{ m}$

Man kan også finde stigens længde med en af de andre formler med cosinus og sinus eller ved at bruge Pythagoras' formel for sidelængderne i en retvinklet trekant: $a^2 + b^2 = c^2$.
Prøv selv!

Man kan finde de ikke-rette vinkler
i en retvinklet trekant med denne formel:

$$\text{Tangens til en vinkel} = \frac{\text{Den modstående katete}}{\text{Den hosliggende katete}}$$

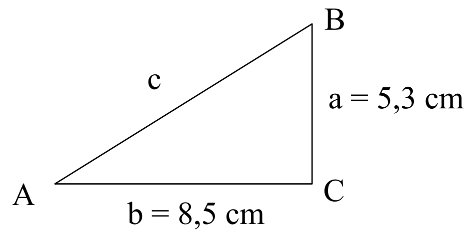


Formlerne gælder for begge ikke-rette vinkler, men tænk dig **godt** om, når du bruger dem!

Eksempel på opgave

I en retvinklet trekant ABC er kateten b = 8,5 cm
og kateten a = 5,3 cm.

Hvor stor er $\angle A$?
Hvor lang er hypotenusen?



Man får først: $\tan(\angle A) = \frac{\text{Den modstående katete}}{\text{Den hosliggende katete}} = \frac{a}{b} = \frac{5{,}3}{8{,}5} = 0{,}623$

Derefter tastes $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{sin}}$ 0,623 $\boxed{=}$, og man får $\angle A = 32^\circ$

Man kan også på en gang taste $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{(}$ 5,3 $\boxed{\div}$ 8,5 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$.

Hypotenusen c kan findes på flere måder. Man kan fx gøre således:

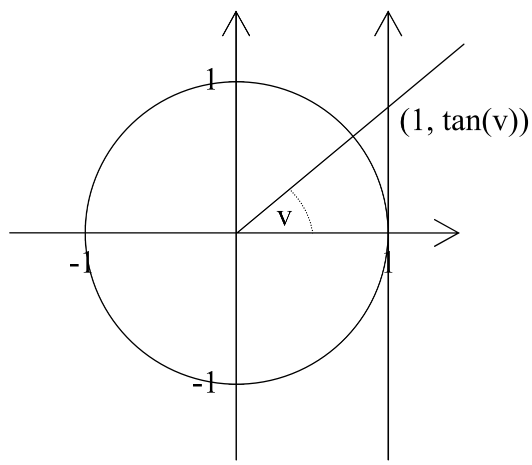
$$b = c \cdot \cos(\angle A)$$
$$8{,}5 = c \cdot \cos(32^\circ)$$

Ved ligningsløsning fås: $c = \frac{8{,}5}{\cos(32^\circ)} = 10{,}0 \text{ cm}$

I starten af dette afsnit blev tangens beskrevet
som anden-koordinaten til et punkt
som vist på tegningen.

Den helt rigtige **definition** er $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$.

De to metoder giver det samme resultat,
men den geometriske beskrivelse er lettere at bruge,
når man arbejder med retvinklede trekanter.



Opgaver

1: Til højre er tegnet en kvart enhedscirkel i et koordinatsystem.

Der er indtegnet vinklerne 0º, 15º, 30º osv. Cosinus og sinus til vinklerne er markeret.

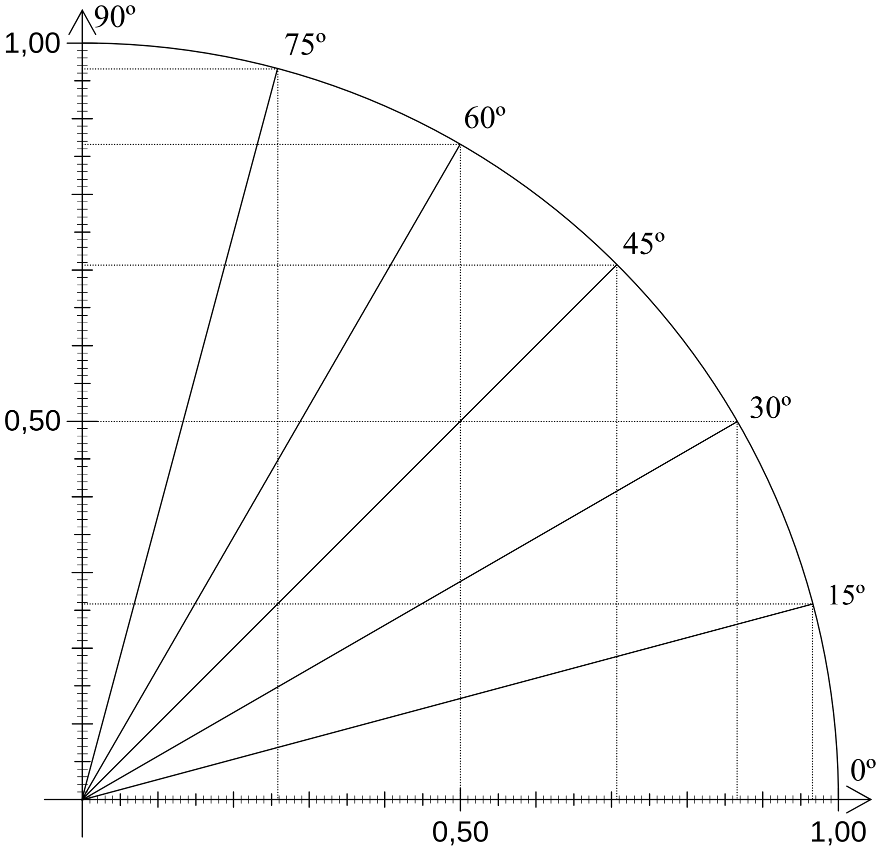
a: Aflæs så præcist som muligt cosinus- og sinus-værdierne. Kontroller også tallene på din regnemaskine..

b: Udfyld vha. koordinatsystemet tabellen herunder.

c: Tabellen og tegningen viser, at der er en vis symetri. Der gælder:

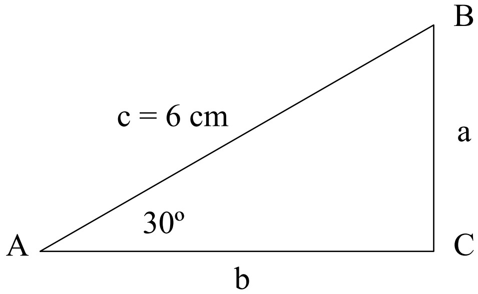
$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(v) = \sin(90 - v)\\ \sin(v) = \cos(90 - v)\end{array}}$$

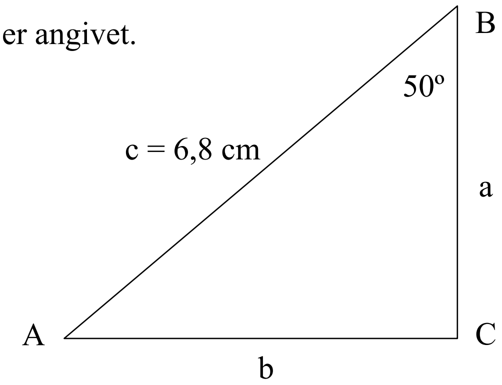
Prøv at forklare hvorfor!



Vinkel	0º	15º	30º	45º	60º	75º	90º
Cosinus							
Sinus							

2: Herunder er skitseret to retvinklede trekanter.
Beregn størrelsen på de sider og vinkler, som ikke er angivet.





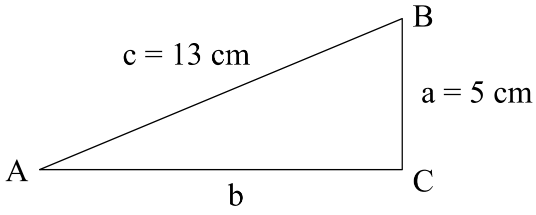
3: Til højre er skitseret en retvinklet trekant ABC

a: Beregn sin(∠A)

b: Find ∠A (antal grader)

c: Find ∠B (antal grader)

d: Find længden af siden b



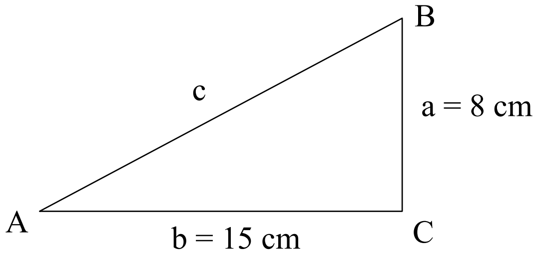
4: Til højre er skitseret en retvinklet trekant ABC

a: Beregn tan(∠A)

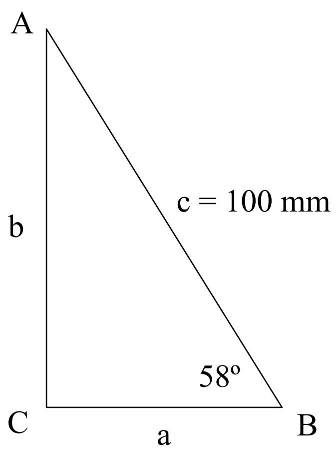
b: Find ∠A (antal grader)

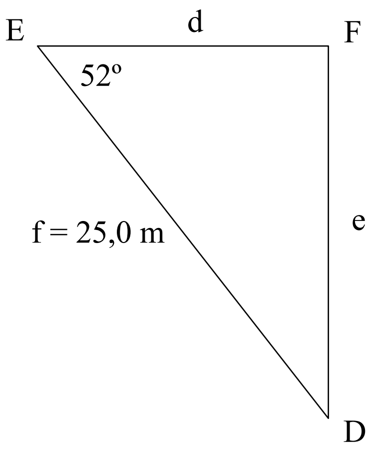
c: Find ∠B (antal grader)

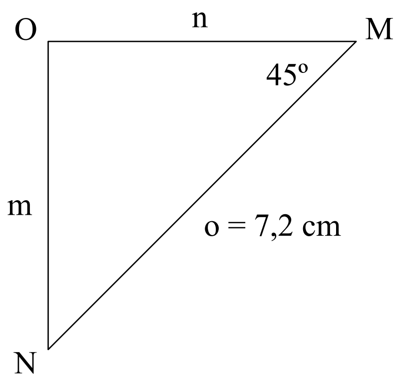
d: Find længden af siden c

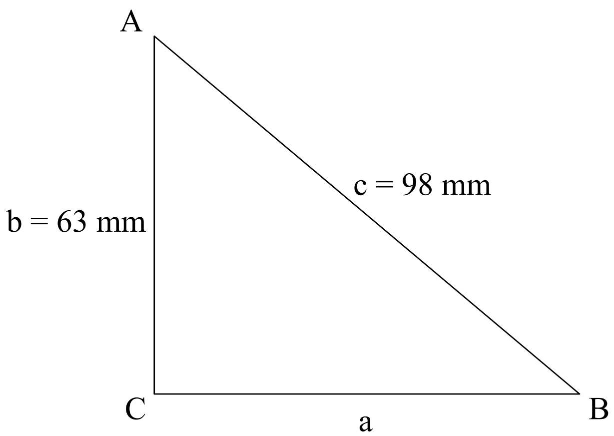


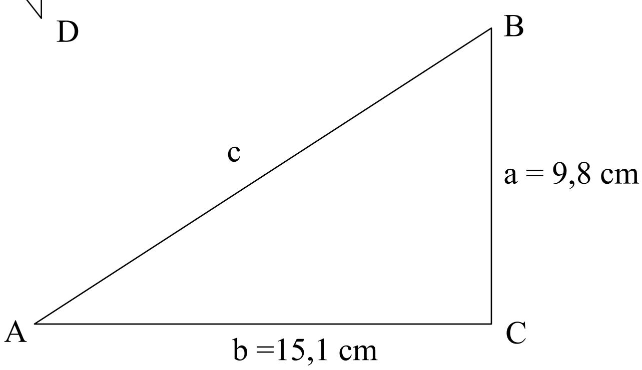
5: Beregn de ukendte vinkler og sider
i de fem retvinklede trekanter.











6: Tegningerne viser et stykke af to trapper.
Trappen til venstre stiger 25º, og trinene er 32 cm brede.
På trappen til højre er trinene 25 cm brede og 18 cm høje.

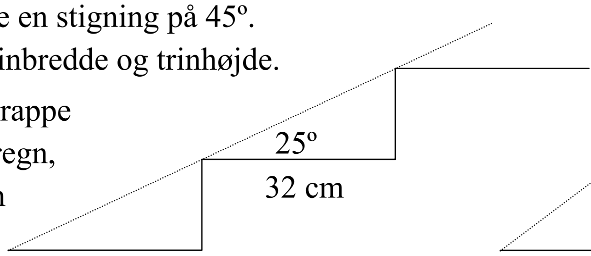
a: Hvor høje er trinene på trappen til venstre?

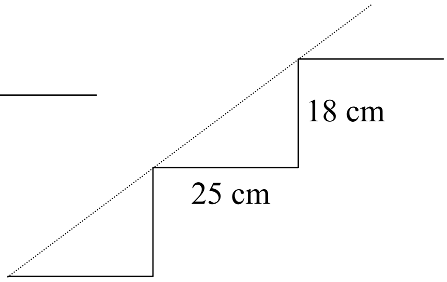
b: Hvor mange graden stiger trappen til højre?

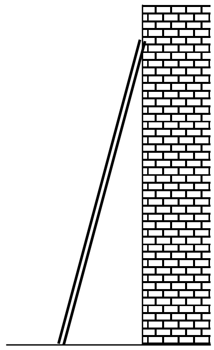
c: En trappe skal have en trinbredde på 26 cm og en stigning på 30º.
Find trinhøjden.

d: En trappe skal have en stigning på 45º.
Giv et forslag til trinbredde og trinhøjde.

e: Mål trinene på en trappe
på din skole og beregn,
hvor mange graden
trappen siger.







7: Tegningen viser en stige, der står op ad en mur.
Stiger skal helst stå med en hældning på 75º.

a: En stige er 5 m lang. Hvor højt kan stigen nå op på muren,
med en hældning på 75º?

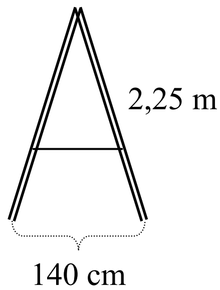
b: Hvor højt kan stigen på 5 m nå op, hvis den hælder 60º?

c: Hvor lang skal en stige være, hvis den skal kunne nå 4 m op
og have en hældning på 75º?

d: En stige er 420 cm lang, og den når 4 m op ad muren.
Hvad er hældning?

e: En stige når 3,5 m op ad muren,
og bunden af stigen står 95 cm fra muren.
Hvad er hældningen?

f: En A-stige (en Wiener-stige) har de viste mål.
Benenes længde er 2,25 m og afstanden mellem benene er 140 cm.
Find benenes hældning og stigens højde.

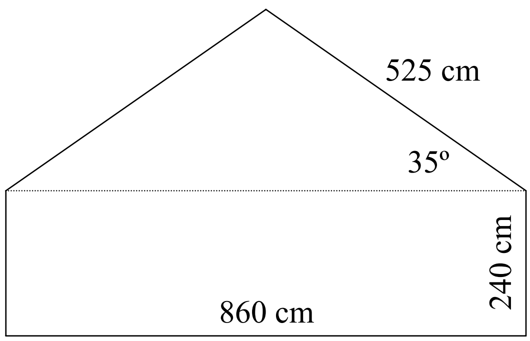


8: Tegningen viser gavlen på et hus.

a: Find husets højde

b: Hvor meget lavere ville huset være,
hvis tagets hældning var 25º?

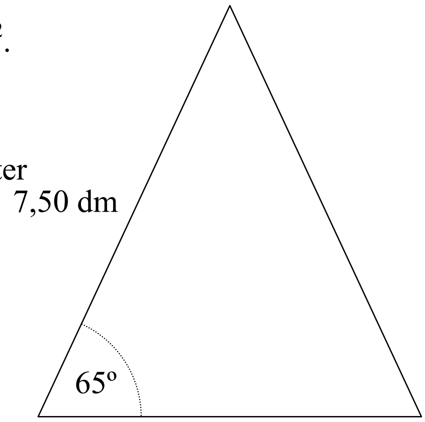
c: Hvor meget højere ville huset være,
hvis tagets hældning var 45º?

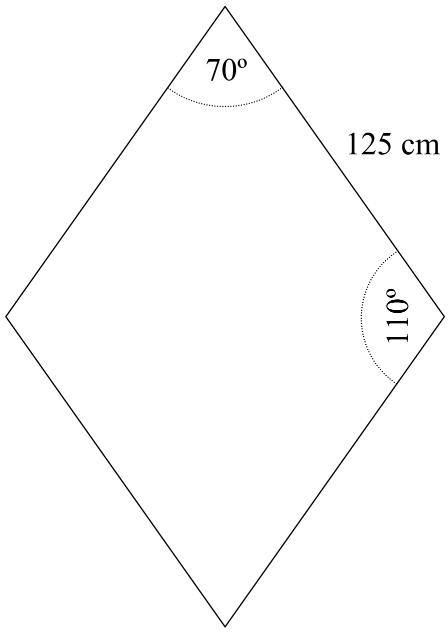


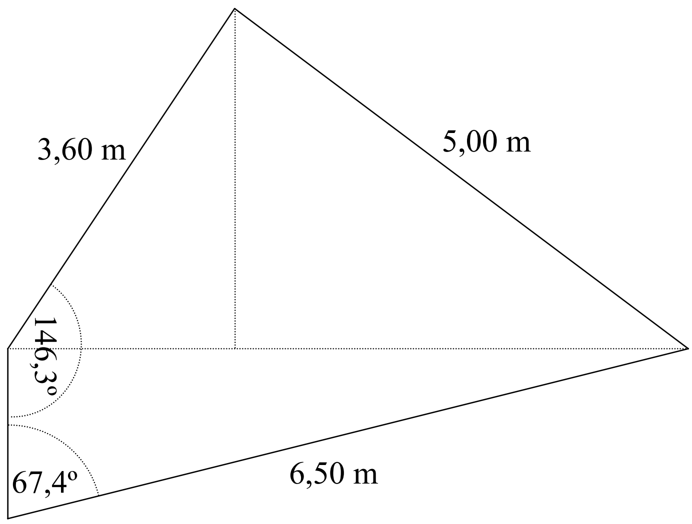
9: Tegningerne viser tre figurer. Den ene er opdelt i retvinklede trekanter.

a: Opdel også de to andre figurer i retvinklede trekanter.

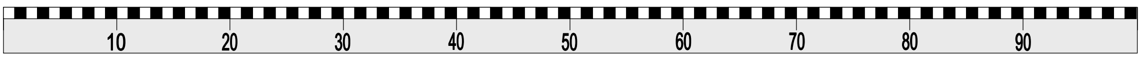
b: Find arealet af hver af de tre figurer. Tallene skal være i m^2.
Du kan fx gøre det således:
- beregn så mange vinkler som muligt
- beregn de manglende sidelængder i de retvinklede trekanter
- beregn arealerne af de retvinklede trekanter
- læg arealerne sammen







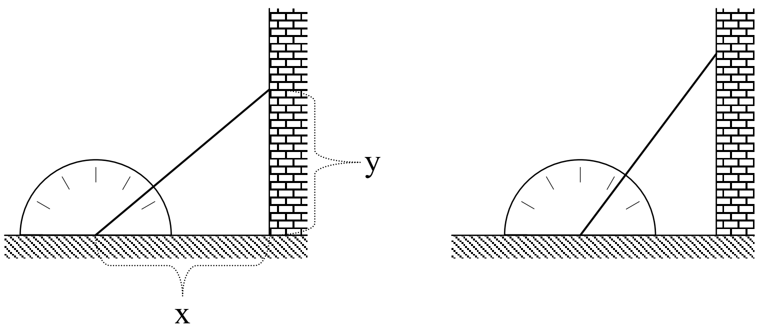
10: I har sikkert en tavlelineal på præcis 1 m i klasseværelset.



Stil linealen på skrå op ad en væg.
Mål vinklen med en vinkelmåler
som vist på tegningerne.
Mål også den vandrette afstand x
og den lodrette afstand y.

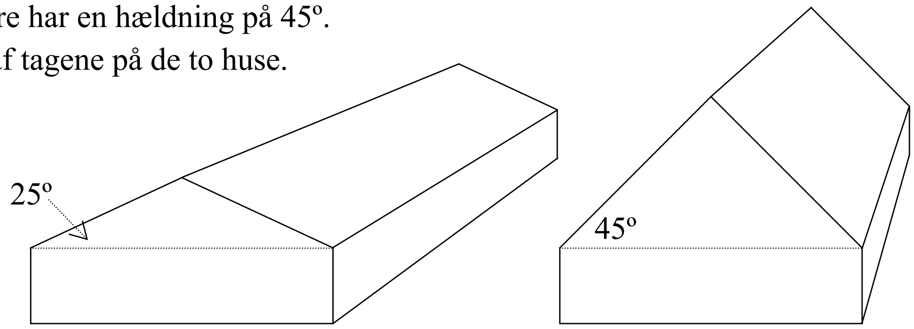
Stil linealen i en ny vinkel
og mål igen vinklen, x og y.

Fortsæt med flere vinkler.



Brug dine målinger til at lave at lave en cosinus- og sinus-tabel.

11: Skitsen viser to huse, som begge er 18 m lange og 8 m brede.
Taget på huset til venstre har en hældning på 25º.
Taget på huset til højre har en hældning på 45º.
Sammenlign arealet af tagene på de to huse.

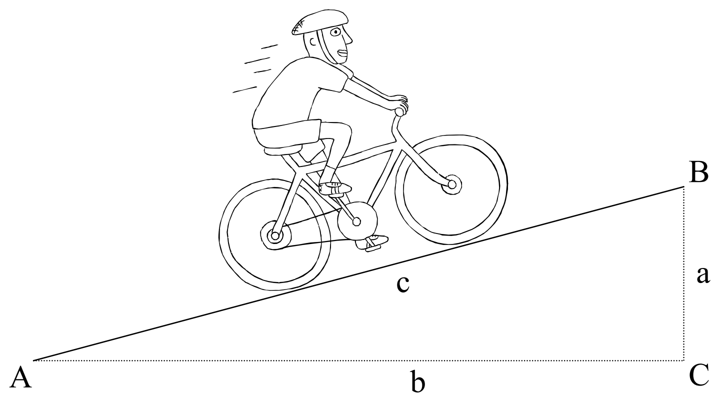


12: Tegningen viser en cyklist på vej op ad en bakke.
Bakken er indtegnet som en retvinklet trekant ABC.

Man kan angive en bakkes stigning på to måder: Som et antal grader og som et antal procent.

Antal grader er størrelsen af ∠A.

Antal procent er den lodrette stigning som procent af den kørte strækning.
Altså a som procent af c.



a: Mål længden af a, b og c på tegningen

b: Find stigningen på tegningen målt i procent.

c: Find stigningen på tegningen målt i grader.
Du må gerne måle vinklen på tegningen men prøv også at beregne tallet.

d: Vurder om det er realistisk at cykle op ad en sådan stigning.

e: Omregn en stigning på 10% til grader.

f: Omregn en stigning på 8º til procent.